

MEGISMERHETŐ VÉLETLEN (ISMÉTLÉS, GYAKORLÁS)

ELMÉLET

Véletlen jelenség, véletlen kísérlet

A valószínűségszámítás véletlen jelenségekkel, helyzetekkel foglalkozik. Amikor egy ilyen véletlen jelenséget megfigyelünk (és feljegyezzük annak kimenetelét), akkor **véletlen kísérletet** végzünk.

Például:

Két dobókocka feldobása egy véletlen jelenség. Véletlen kísérletet végzek, amikor konkrétan feldobok egy fehér és egy fekete dobókockát, és megfigyelem a dobás eredményét. A kísérlet kimenetele, hogy mennyit dobtam a fehér, és mennyit dobtam a fekete kockával.

Elemi események

Egy véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit **elemi eseményeknek** nevezzük.

Például:

Egy fehér és egy fekete dobókockával dobva egy elemi esemény, ha a fehér kockával 3-ast, a fekete kockával 4-est dobunk. Ebben a véletlen kísérletben 36 különböző elemi esemény következhet be.

Véletlen kísérletek és relatív gyakoriság

Azt tapasztaljuk, hogy ha a véletlen kísérletet nagyon sokszor, azonos körülmények között végezzük el, akkor egy konkrét kimenetel relatív gyakorisága egy jól meghatározott érték közelében ingadozik.

Például:

Ha egy pénzérmét nagyon sokszor feldobunk, akkor annak a relatív gyakorisága, hogy a dobás eredménye fej, várhatóan 0,5 közelében lesz.

Valószínűség

Ha egy véletlen esemény során az elemi események egyformán valószínűek (és a lehetséges elemi események száma véges), akkor az esemény **valószínűségét** úgy számolhatjuk, hogy a kedvező elemi események számát elosztjuk az összes elemi esemény számával.

A valószínűség jele P (a latin *probabilitas* szó kezdőbetűje, ami valószínűséget jelent).

Például:

- Két pénzérmét feldobva mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét érmen fej látható? Azt gondolhatnánk, hogy 3 kimenetel van: mindkét érmen fej, mindkét érmen írás, illetve egyiken fej és másikon írás, így a valószínűség $\frac{1}{3}$. De ezek nem egyformán valószínű elemi események! Az „egyik fej, másik írás” kimenetel kétféle módon valósulhat meg: lehet az első fej és a második írás, és lehet fordítva, az első írás és a második fej. Akkor írunk fel egyenlően valószínű elemi eseményeket, ha ezeket megkülönböztetjük. Egyenlően valószínű elemi események tehát: FF, FI, IF, II, ez összesen 4 lehetőség. Ebből 1 a kedvező, ezért a valószínűség $\frac{1}{4}$. Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy a relatív gyakoriság is 0,25 közelében lesz. Az előző két modell között az a különbség, hogy az egyikben a két pénzérmét egyformának gondoljuk, a másikban megkülönböztethetőnek. A kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy megkülönböztethetők. Így a valóságot a második modell írja le.
- Két dobókockával dobva 3 olyan elemi esemény van, amikor a dobott számok összege 10 (fehér hatos és fekete négyes, fehér ötös és fekete ötös, fehér négyes és fekete hatos). Ezért annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10, úgy számolható, hogy a kedvező elemi események számát (3) osztjuk az összes elemi esemény számával (36). A valószínűség:
$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ha az elemi események egyformán valószínűek



egy esemény valószínűsége = $\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$

FELADATOK KOCKADOBÁSRA

1. PÉLDA:

Egy dobókockával dobunk, és vizsgáljuk a dobott számot. Mekkora annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a dobott szám 2-nél nagyobb?

Megoldás:

$H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, véges sok elemi esemény van, melyek a tapasztalat szerint egyformán valószínűek, így a klasszikus modell alkalmazható a valószínűség kiszámítására.

Az összes elemi események száma: $n = 6$, $A = \{3, 4, 5, 6\}$, így a kedvező elemi események száma: $k = 4$, tehát

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

2. PÉLDA:

Egy sárga és egy piros dobókockát feldobunk, és a dobott számokat összeadjuk. Mi a valószínűsége, hogy az összeg 7?

Megoldás

A két különböző kockával való dobás lehetséges eredményeit szemléltessük egy négyzettel, amelyet vízszintesen és függőlegesen is hat egyenlő részre osztunk. Az oszlopok jelentsék sorban azt, hogy a sárga kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk, az egymás alatti sorok pedig azt, hogy a piros kockával 1, 2, 3, 4, 5, 6-ost dobunk. Így a két kockával összesen 36-féle számpárt dobhatunk, az összes elemi események száma: 36.

						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

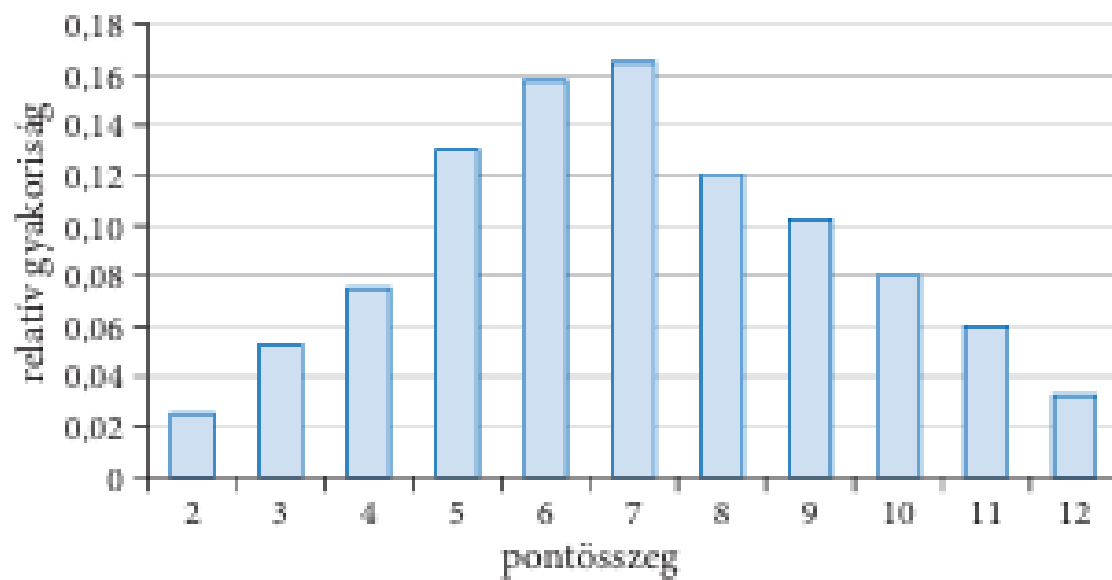
a kis négyzetekbe beírtuk a dobott számok összegét, így látható, hogy az összeg 6-féleképpen lehet 7. Tehát annak a valószínűsége, hogy a két kockával dobott számok összege 7:

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

3. PÉLDA:

- d) Egy tanulócsoporthban 8 pár összesen 400 kísérletet végzett el. Összesített táblázatuk és relatív gyakorisági diagramjuk a következőképpen alakult:

Pontösszeg	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Összesen
Gyakoriság	10	21	30	52	63	66	48	41	32	24	13	400
Relatív gyakoriság	0,025	0,0525	0,075	0,13	0,1575	0,165	0,12	0,1025	0,08	0,06	0,0325	1



4. PÉLDA:

- 1**  **a)** Az alábbi táblázat azt tartalmazza, hogy két dobókockával dobva mennyi a két dobás összege. Az első sor mutatja a fekete dobókockával dobott számot, az első oszlop pedig a fehér dobókockával dobott számot. Írd be az üres mezőkbe a két dobás összegét! Néhány mezőt már kitöltöttünk.

	1	2	3	4	5	6
1			4			
2		4				
3				7		
4						10
5	6					
6					11	

- b)** Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?
- c)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fekete kockán 4, a fehér kockán pedig 1 pont lesz egy dobás után?
- d)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy dobásnál a dobott pontok összege 12 lesz?
- e)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 7? Alátámasztja-e ezt a pármunkában végzett kísérlet eredménye?
- f)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege 8? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?
- g)** Mekkora annak a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege kisebb 5-nél? Alátámasztja-e ezt a kísérlet eredménye?

Megoldás:

a)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b) Hány lehetséges kimenetele van a kísérletnek?

Mivel mindkét kockának 6 oldala van, az összes lehetőséget a művelettel kapjuk meg.

Válasz: 36 lehetséges kimenetel van.

c) Mekkora a valószínűsége, hogy a fekete kockán 4, a fehérén 1 pont lesz?

Ez pontosan egy konkrét mező a 36-ból (a 4. oszlop és az 1. sor metszete).

Valószínűség:

$$P = \frac{1}{36}$$

d) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 12 lesz?

Csak egyetlen esetben lesz az összeg 12: ha mindkét kockával 6-ost dobunk (6+6).

Valószínűség:

$$P = \frac{1}{36}$$

e) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 7?

Ha megnézed a táblázatot, a 7-esek az egyik átlón helyezkednek el. Soroljuk fel őket: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Ez összesen 6 eset.

Valószínűség:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ (kb. 16,7\%)}$$

f) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 8?

Az összegek, amik 8-at adnak: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2). Ez összesen 5 eset.

Valószínűség:

$$P = \frac{5}{36} \text{ (kb. 13,9\%)}$$

g) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg kisebb 5-nél?

Azok az esetek kellenek, ahol az összeg 2, 3 vagy 4.

Összeg = 2: (1,1) → 1 eset

Összeg = 3: (1,2), (2,1) → 2 eset

Összeg = 4: (1,3), (2,2), (3,1) → 3 eset

Összesen: 1 + 2 + 3 = 6 kedvező eset.

Valószínűség:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

5. PÉLDA:

2 Mekkora annak a valószínűsége, hogy két (színre és méretre is) egyforma szabályos dobókockával dobva a dobott pontok összege
a) 7; **b)** 11; **c)** 6 lesz?

Megoldás:

a) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 7 lesz?

A 7-es a leggyakoribb összeg, mert ehhez van a legtöbb variáció:

Kedvező esetek: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3) — összesen **6 eset**.

Valószínűség:

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%$$

b) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 11 lesz?

Itt már jóval kevesebb a lehetőségünk:

Kedvező esetek: (5,6), (6,5) — összesen **2 eset**.

Valószínűség:

$$P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 5,6\%$$

c) Mekkora a valószínűsége, hogy az összeg 6 lesz?

Számoljuk össze, hányféleképpen jöhet ki a hatos:

Kedvező esetek: (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3) — összesen **5 eset**.

Valószínűség:

$$P = \frac{5}{36} \approx 13,9\%$$

BIZTOS, LEHETETLEN, VÉLETLEN

ELMÉLET

1. A **biztos esemény** mindig bekövetkezik, valószínűsége 1.
2. A **lehetetlen esemény** sohasem következik be, valószínűsége 0.
3. Ha az elemi események egyformán valószínűek, és számuk véges, amit jelöljünk n -nel, akkor
 - egy elemi esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{1}{n}$;
 - ha k darab olyan elemi esemény van, amikor bekövetkezik az A esemény, akkor az A esemény valószínűsége az elemi esemény valószínűségének k -szorosa: $P(A) = \frac{k}{n}$.
4. Ha két esemény olyan kapcsolatban van egymással, hogy egyszerre sohasem következnek be, ugyanakkor közülük az egyik biztosan bekövetkezik, akkor ezeket **egymást kiegészítő eseményeknek** vagy **komplementer eseményeknek** nevezzük. Ha egy esemény valószínűsége p , akkor komplementer eseményének valószínűsége $1 - p$.

Például:

- A „dobott szám hatos”, a „dobott szám nem hatos”: ezek komplementer események.

FELADATOK:

- 1.** Mekkora annak a valószínűsége, hogy két különböző színű, szabályos dobókockával dobva
- a) a dobott pontok összege 16-nál kisebb lesz;
 - b) a dobott pontok összege 12-nél nagyobb lesz;
 - c) a dobott pontok összege 5 lesz?

Megoldás

- a) Ez az esemény mindenképpen bekövetkezik, vagyis **biztos esemény**. A valószínűsége 1.
- b) Ez az esemény egyetlen alkalommal sem következhet be, tehát **lehetetlen esemény**. A valószínűsége 0.
- c) Ez az esemény négyféleképpen is bekövetkezhet: „a dobott pontok összege 5” esemény négy elemi esemény esetén valósul meg. Mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{36}$, ezért a keresett valószínűség 4-szer ekkora, azaz $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

- 2.** Egy dobozban 5 különböző színű golyó van: barna, fehér, kék, piros, sárga. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy golyót véletlenszerűen kihúzva
- a) a golyó piros lesz;
 - b) a golyó nem piros lesz;
 - c) a golyó barna vagy kék lesz?

Megoldás

A véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleinek száma 5, és ezek mind egyenlően valószínűek. Tehát mindegyik elemi esemény valószínűsége $\frac{1}{5}$.

- a) A piros golyó húzása elemi esemény, tehát $\frac{1}{5}$ a valószínűsége.
- b) Most 4 kedvező elemi esemény van. Ennek az eseménynek a valószínűsége tehát $\frac{4}{5}$.
- c) A kedvező elemi események száma 2, ezért az esemény bekövetkezésének valószínűsége $\frac{2}{5}$.